

文章编号:2095-7386(2019)03-0051-05

DOI:10.3969/j.issn.2095-7386.2019.03.010

一维辐射方程边界层解的存在性

田 恒, 范丽丽

(武汉轻工大学 数学与计算机学院, 湖北 武汉 430023)

摘 要: 辐射 Euler 方程系统描述了带有热辐射现象的可压流体运动, 是一类典型的双曲抛物耦合方程组, 是目前国内外数学工作者所关心的一个热门问题。在前期工作的基础上, 得到一维辐射 Euler 方程组边界层解的存在区域和衰减性质。

关键词: 辐射方程; 边界层解; 指数衰减; 代数衰减

中图分类号: O 175.2

文献标识码: A

The existence of the boundary layer for the radioactive euler equations in the one-dimensional

TIAN Heng, FAN Li-li

(School of Mathematics and Computer Science, Wuhan Polytechnic University, Wuhan 430023, China)

Abstract: The radioactive Euler equations are a fundamental system to describe the motion of the compressible gas with the radioactive heat transfer phenomena, and it's a kind of hyperbolic-elliptic coupled system. At present, mathematics workers are concerned about this hot issue. This paper is devoted to studying the radioactive Euler equations in one-dimensional half space. We will show the unique boundary layer solution exist in different areas under some smallness conditions.

Key words: radiative euler equations; boundary layer wave; exponential decay; algebraical decay

1 引言

从宏观的角度来说, 流体可以看作在全空间占据一定区域的连续介质, 而流体的运动一般由 Navier-Stokes 或者 Euler 方程组来刻画, 是应用最为广泛的一类流体力学方程组。辐射 Euler 方程系统描述了带有热辐射现象的可压流体运动, 是典型的一类带耗散项的非线性双曲守恒律组, 是目前国内外数学工作者所关心的一个热门问题^[1-4]。在数学物理上, 一维半平面辐射 Euler 系统可用如下偏

微分方程表达:

$$\begin{cases} \rho_t + (\rho u)_x = 0, \\ (\rho u)_t + (\rho u^2 + p)_x = 0, \\ \left\{ \rho u \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + pu \right\}_t + \left\{ \rho u \left(e + \frac{u^2}{2} \right) + pu \right\}_x + q_x = 0, \\ -q_{xx} + aq + b(\theta^4)_x = 0. \end{cases} \quad (1)$$

$x \in R_+ = [0, +\infty), t > 0$, 其中 $\rho(x, t), u(x, t), p(x, t), e(x, t)$ 及 $\theta(x, t)$ 分别是辐射流体的密度, 速度, 压强, 内能以及绝对温度变量, 而 $q(x, t)$

收稿日期: 2019-03-29.

作者简介: 田恒(1992-), 女, 硕士研究生, E-mail: tianheng0222@126.com.

通信作者: 范丽丽(1981-), 女, 博士, 副教授, 研究生导师, E-mail: fll810@live.cn.

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(11871388).

为气体的热辐射流量。 a, b 为系统状态常数, 流体中的压强和内能满足流体状态方程

$$p = RP\theta, \quad e = C_v\theta = \frac{R}{\gamma-1}\theta.$$

A, R 均为正常数。式(1) 的初始状态为:

$$(\rho, u, \theta)(x, 0) = (\rho_0, u_0, \theta_0)(x) \rightarrow (\rho_+, u_+, \theta_+)(x \rightarrow +\infty). \quad (2)$$

$\rho_+ > 0, u_+, \theta_+ > 0$ 为给定的右状态。文献([1-3]) 证明了辐射系统初值问题基本波的稳定性, 如稀疏波, 激波和接触间断。文献[4] 将结果扩展到边界值问题。当宏观流体以速度 u 流过边界, 日本教授 Matsumura 在文献[5] 中作了一个分类, 当 $u < 0$, 意味着流体是流出空间区域, 式(1), 式(2) 称为 outflow 问题(图 1 所示); 当 $u > 0$, 意味着该流体是流入空间区域, 式(1), 式(2) 称为 inflow 问题(图 2 所示); 当 $u = 0$, 意味着流体是无穿入, 式(1), 式(2) 称为不可穿梭流问题。

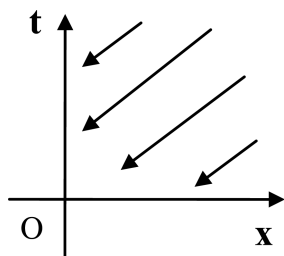


图 1 outflow 问题

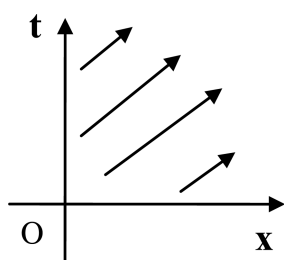


图 2 inflow 问题

考虑到流体与边界的摩擦与非线性作用, 以及流体的流向, 为了找到问题式(1), 式(2) 的适定解, 还要提出合适的边界条件。从方程组式(1) 整体来观察, 温度变量除了辐射效应, 还有扩散效应, 因此提出边界条件

$$\theta(0, t) = \theta_-. \quad (3)$$

而密度和速度变量满足的是双曲结构, 根据 Navier-Stoke 方程组的分析, 对于宏观可压缩流体, 则需要不同的区域内定义不同的边界条件。根据流体速度的不同, 首先定义不同的流速区。在

Navier-Stoke 系统中^[6-7], 定义音速为

$$C(\theta) = \sqrt{\gamma R \theta}. \quad (4)$$

空间域可以分为低音速区 Ω_{sub} , 跨音速区 Ω_{trans} 和超音速区 Ω_{supper} 如下^[6]:

$$\begin{aligned} \Omega_{\text{sub}}^+ &= \{(\rho, u, \theta) \mid 0 < u < C(\theta)\}, \\ \Omega_{\text{sub}}^- &= \{(\rho, u, \theta) \mid -C(\theta) < u < 0\}, \\ \Omega_{\text{trans}}^+ &= \{(\rho, u, \theta) \mid u = C(\theta)\}, \\ \Omega_{\text{trans}}^- &= \{(\rho, u, \theta) \mid u = -C(\theta)\}, \\ \Omega_{\text{supper}}^+ &= \{(\rho, u, \theta) \mid u > C(\theta)\}, \\ \Omega_{\text{supper}}^- &= \{(\rho, u, \theta) \mid u < -C(\theta)\}. \end{aligned} \quad (5)$$

对于宏观辐射流体, 采用相同的思路考虑, 我们重新定义音速^[4]:

$$\overline{C(\theta)} = \sqrt{R\theta}. \quad (6)$$

空间域依然可以划分为低音速区 $\overline{\Omega}_{\text{sub}}$, 跨音速区 $\overline{\Omega}_{\text{trans}}$ 和超音速区 $\overline{\Omega}_{\text{supper}}$, 如下:

$$\begin{aligned} \overline{\Omega}_{\text{sub}}^+ &= \{(\rho, u, \theta) \mid 0 < u < \overline{C(\theta)}\}, \\ \overline{\Omega}_{\text{sub}}^- &= \{(\rho, u, \theta) \mid -\overline{C(\theta)} < u < 0\}, \\ \overline{\Omega}_{\text{trans}}^+ &= \{(\rho, u, \theta) \mid u = \overline{C(\theta)}\}, \\ \overline{\Omega}_{\text{trans}}^- &= \{(\rho, u, \theta) \mid u = -\overline{C(\theta)}\}, \\ \overline{\Omega}_{\text{supper}}^+ &= \{(\rho, u, \theta) \mid u > \overline{C(\theta)}\}, \\ \overline{\Omega}_{\text{supper}}^- &= \{(\rho, u, \theta) \mid u < -\overline{C(\theta)}\}. \end{aligned} \quad (7)$$

如图 3 所示:

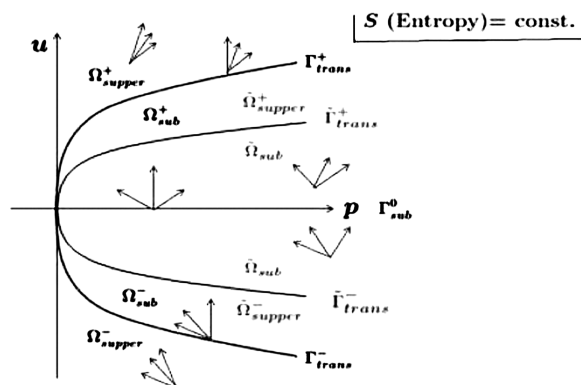


图 3 划分空间域

笔者研究在不同区域内, 辐射 Euler 系统即式(1)一式(3) 边界层解的存在及其衰减性质。

2 边界层解及主要结论

笔者研究辐射 Euler 系统即式(1), 式(2) 的边界层解的存在及其衰减性质。边界层解是一类特殊解, 即与时间变量 t 无关, 只与空间变量 x 有关的一

类静态解。设边界层解为 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta}, \bar{q})(x)$ 满足方程

$$\begin{cases} (\bar{\rho}\bar{u})_x = 0, \\ (\bar{\rho}\bar{u}^2 + \bar{p})_x = 0, \\ \{\bar{\rho}\bar{u}(\bar{e} + \frac{\bar{u}^2}{2}) + \bar{p}\bar{u}\}_x + \bar{q}_x = 0, \\ a\bar{q} + b(\bar{\theta})^4_x = 0. \end{cases} \quad (8)$$

以及边界条件和无穷远处的由状态:

$$\begin{cases} \bar{\theta}(0) = \theta_-, \\ (\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta}, \bar{q})(+\infty) = (\rho_+, u_+, \theta_+, 0) \end{cases} \quad (9)$$

定义边界层的强度为

$$\delta := |\theta_+ - \theta_-|.$$

定理 2.1 已知右状态 (ρ_+, u_+, θ_+) 和边界绝对温度 θ_- , 若强度 δ 充分小, 式(8)–(9) 满足

(1) 若 $\sqrt{R\theta_+} < u_+ < \sqrt{\gamma R\theta_+}$, 即 $(\rho_+, u_+, \theta_+) \in \Omega_{\text{supper}}^+ \cap \Omega_{\text{sub}}^+$, 式(8)–(9) 存在唯一解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta}, \bar{q})(x)$ 且存在某一正常数 C 使得

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} (\bar{\rho} - \rho_+, \bar{u} - u_+, \bar{\theta} - \theta_+, \bar{q} - q_+) \right| \leq C\delta^k e^{-\delta x}, (k = 1, 2, 3 \cdots). \quad (10)$$

(2) 若 $u_+ = \sqrt{\gamma R\theta_+}$, 即 $(\rho_+, u_+, \theta_+) \in \Gamma_{\text{trans}}^+$, 式(8)–(9) 存在唯一解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta}, \bar{q})(x)$ 且存在某一正常数 C 使得

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} (\bar{\rho} - \rho_+, \bar{u} - u_+, \bar{\theta} - \theta_+, \bar{q} - q_+) \right| \leq \frac{C\delta^{k+1}}{1 + (\delta x)^{x+1}}, (k = 1, 2, 3 \cdots). \quad (11)$$

(3) 若 $u_+ < -\sqrt{\gamma R\theta_+}$ 或 $-\sqrt{R\theta_+} < u_+ < 0$, 即 $(\rho_+, u_+, \theta_+) \in \Omega_{\text{supper}}^-$, 或 $(\rho_+, u_+, \theta_+) \in \Omega_{\text{sub}}^-$, 式(8)–(9) 存在唯一解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta}, \bar{q})(x)$ 且满足估计式(10)。

由定理 2.1 的结论, 可知, 一维半平面上, 辐射 Euler 系统即式(1)–式(3) 确实存在与时间无关的边界层解且

1. 对于 inflow 问题, 边界层解存在的区域分布在部分超音速区 $\Omega_{\text{supper}}^+ \cap \Omega_{\text{sub}}^+$ 及跨音速区 Γ_{trans}^+ , 如图 3 所示。

2. 对于 outflow 问题, 边界层解存在的区域分布在低音速区 Ω_{sub}^- 和超音速区 Ω_{supper}^- , 如图 3 所示。

3. 在超音速区 $\Omega_{\text{supper}}^+ \cap \Omega_{\text{sub}}^+$, Ω_{supper}^- 及低音速区 Ω_{sub}^- , 边界层解满足指数衰减性(10); 而在跨音速区 Γ_{trans}^+ , 边界层解满足代数衰减性(11)。

定理 2.1 的证明将直接由引理 3.1 得到。

3 边界层解

3.1 左状态 (ρ_-, u_-)

为了证明定理 2.1, 首先定义相容的左边界状态。为此对于固定的右状态 (ρ_+, u_+, θ_+) , 即:

$$\bar{\rho}(0) = \rho_-, \bar{u}(0) = u_-, Z_+ := (\rho_+, u_+, \theta_+), \quad (12)$$

若 $Z_- := (\rho_-, u_-, \theta_-) \in BL(Z_+)$, 即希望边界层解 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta})(x)$ 连接左状态 Z_- 与右状态 Z_+ 。将方程组(1) 的第一个方程和的第二个方程左右两边在 $(0, +\infty)$ 上积分, (ρ_-, u_-) 满足:

$$\begin{cases} \rho_- u_- = \rho_+ u_+, \\ \rho_- u_-^2 + R\rho_- \theta_- = \rho_+ u_+^2 + R\rho_+ \theta_+, \end{cases} \quad (13)$$

故

$$\rho_- = \frac{\rho_+ u_+}{u_-} \quad (14)$$

同时, 由方程组即式(3) 的第二个方程可知, u_- 满足相容条件

$$\begin{aligned} \rho_+ u_+ u_-^2 + R\rho_+ u_+ \theta_- &= (\rho_+ u_+^2 + R\rho_+ \theta_+) u_-, \\ \Rightarrow u_+ u_-^2 + Ru_+ \theta_- &= (u_+^2 + R\theta_+) u_-, \\ \Rightarrow u_+ u_-^2 - (u_+^2 + R\theta_+) u_- + Ru_+ \theta_- &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

因此, 对于已知的右有状态 (ρ_+, u_+, θ_+) 和 θ_- , 方程判别式为

$$\begin{aligned} \Delta &= (u_+^2 + R\theta_+)^2 - 4Ru_+^2 \theta_- = \\ &= (u_+^2 + R\theta_+)^2 - 4Ru_+^2 \theta_+ + 4Ru_+^2 (\theta_+ - \theta_-) \\ &= (u_+^2 - R\theta_+)^2 + 4Ru_+^2 (\theta_+ - \theta_-) \end{aligned}$$

只要边界层的强度 δ 充分小, 就可得 $\Delta > 0$, 从而由二元方程求根公式可得

$$\begin{aligned} u_- &= \frac{u_+^2 + R\theta_+ + u_+^2 - R\theta_+}{2u_+} + O(1)\delta \\ &= u_+ + O(1)\delta. \end{aligned} \quad (16)$$

综上分析, 对于已知的右状态 (ρ_+, u_+, θ_+) 和 θ_- , 若 δ 充分小, 由式(14), 式(16), 可以确定相容的左状态 (ρ_-, u_-) 且 $Z_- \in \Omega(Z_+, \delta)$, $\Omega(Z_+, \delta)$ 以 Z_+ 为中心, 半径与 δ 有关的空间域。

3.2 变换方程

确定好相容的初始状态, 我们再研究方程本身, 由方程组即式(1) 的第四个方程可得:

$$\bar{q} = -\frac{b}{a} (\bar{\theta}^4)_x = -\frac{4b\bar{\theta}^3}{a} \bar{\theta}_x. \quad (17)$$

由将方程组即式(1) 的 1–3 方程等式左右在 $(0, x)$ 上积分, 可知 $(\bar{\rho}, \bar{u}, \bar{\theta})(x)$ 满足:

$$\begin{cases} \bar{\rho} = \rho_+ u_+, \\ \bar{\rho}^2 + \bar{p} = \rho_+ u_+^2 + p_+, \\ \{\bar{\rho}(\bar{e} + \frac{\bar{u}^2}{2} - \bar{p}u)\} - \{\rho_+ u_+ (e_x + \frac{u_+^2}{2}) + p_+ u_+\} = -\bar{q} = \frac{4b}{a}\bar{\theta}^3\bar{\theta}_x \end{cases} \quad (18)$$

经过代数化简后可得:

$$\begin{cases} \bar{\rho} - \rho_+ = \frac{\rho_+}{\mu}(u_+ - \bar{u}), \\ \bar{u} - u_+ = \frac{1}{\rho_+ u_+}(p_+ - \bar{p}). \end{cases} \quad (19)$$

将式(19)代入式(18)的第三个方程,整理后满足

$$\begin{cases} \bar{\theta}_x = H(\bar{\theta}), \\ \bar{\theta}(0) = \theta_-, \bar{\theta}(+\infty) = \theta_+. \end{cases} \quad (20)$$

其中

$$\begin{aligned} H(\bar{\theta}) &= \frac{a}{4b\theta_+^3} \{C_v \rho_+ u_+ (\bar{\theta} - \theta_+) + p_+ (\bar{u} - u_+) - \\ &\quad \frac{\rho_+ u_+}{2} (\bar{u} - u_+)^2\} \\ &= \frac{aC_v \rho_+ u_+}{4b\theta_+^3} \frac{\gamma R \theta_+ - u_+^2}{R \theta_+ - u_+^2} (\bar{\theta} - \theta_+) + O(1)((\bar{\theta} - \theta_+)^2). \end{aligned} \quad (21)$$

因此,需要重点求解常微分方程系统即式(20)以得到 $\bar{\theta}(x)$,再代回到方程式(17),式(19),进而求解出 $\bar{\rho}(x)$, $\bar{u}(x)$ 及 $\bar{q}(x)$ 。显然, $\bar{\rho}(x)$, $\bar{u}(x)$ 与 $\bar{\theta}(x)$ 具有相同阶的衰减性,而 $\bar{q}(x)$ 比 $\bar{\theta}(x)$ 具有高阶的衰减性。

3.3 求解常微分方程

求解常微分方程即式(20),证明定理 2.1。

由式(21)可知 $H(\theta_+) = 0$ 。同时,由常微分方程的稳定性理论可知,超定常微分方程即式(20)的解存在的充分条件为^[8-10]:

$$H'(\theta_+) = \frac{aC_v \rho_+ u_+}{4b\theta_+^3} \frac{\gamma R \theta_+ - u_+^2}{R \theta_+ - u_+^2} \leq 0. \quad (22)$$

当 $u_+ > 0$ 时,式(22)意味着

$$\sqrt{R\theta_+} < u_+ \leq \sqrt{\gamma R \theta_+}$$

特别地,若 $u_+ = \sqrt{\gamma R \theta_+}$ 可得出

$$\begin{aligned} H(\bar{\theta}) &= -\frac{\gamma(\gamma+1)}{2(\gamma-1)} \frac{C_v \rho_+ u_+}{\theta_+ \bar{\theta}^3} (\bar{\theta} - \theta_+)^2 + \\ &\quad O(1)(\bar{\theta} - \theta_+)^3. \end{aligned} \quad (23)$$

当 $u_+ < 0$ 时,式(22)意味着

$$u_+ \leq -\sqrt{\gamma R \theta_+} \text{ 或 } -\sqrt{R \theta_+} < u_+ < 0.$$

且可得以下引理:

引理 3.1 已知右状态 (ρ_+, u_+, θ_+) 和 θ_- ,若 δ 充

分小,常微分方程即式(20)有以下结论:

(1) 若 $\sqrt{R\theta_+} < u_+ < \sqrt{\gamma R \theta_+}$,常微分方程即式

(20) 存在唯一解 $\bar{\theta}(x)$ 且满足

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} (\bar{\theta} - \theta_x) \right| \leq C \delta^k e^{-\delta x}, (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (24)$$

(2) 若 $u_+ = \sqrt{\gamma R \theta_+}$,常微分方程即式(20)存在

唯一解 $\bar{\theta}(x)$ 且满足

$$\left| \frac{d^k}{dx^k} (\bar{\theta} - \theta_x) \right| \leq \frac{C \delta^{k+1}}{1 + (\delta x)^{k+1}}, (k = 1, 2, 3 \dots). \quad (25)$$

(3) 若 $u_+ < -\sqrt{\gamma R \theta_+}$ 或 $-\sqrt{R \theta_+} < u_+ < 0$,常微分方程(20)存在唯一解 $\bar{\theta}(x)$ 且满足(24)。

(4) 若 $u_+ < -\sqrt{\gamma R \theta_+}$,常微分方程(20)存在唯一解 $\bar{\theta}(x)$ 且满足(25)。

证明:存在性的结果由常微分方程的稳定性^[5-7]即可知,这里主要证明 $\bar{\theta}(x)$ 的衰减性,也就是式(24)、式(25)。

(1) 当 $H'(\theta_+) < 0$ 的情形:为表达方便,不失去一般性,设 $\theta_- < \theta_+$,由 Taylor 展开式:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_x &= H(\bar{\theta}) = H(\theta_+) + H'(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+) + \\ &\quad \frac{1}{2} H''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+)^2, (\bar{\theta} < \xi < \theta_+) = [H'(\theta_+) + \\ &\quad \frac{1}{2} H''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+)](\bar{\theta} - \theta_+). \end{aligned} \quad (26)$$

其中 $H''(\bar{\theta})$ 是关于 $\bar{\theta}$ 的连续函数,故在区间 $[\theta_-, \theta_+]$ 上, $H''(\bar{\theta})$ 有界,即存在 $M_1 > 0$,使得

$$|H''(\bar{\theta})| \leq M_1, \bar{\theta} \in [\theta_-, \theta_+].$$

另一方面,

$$|\bar{\theta} - \theta_+| \leq |\theta_- - \theta_+| = \delta,$$

故

$$\begin{aligned} H'(\theta_+) - \frac{1}{2} M_1 \delta &\leq H'(\theta_+) + \frac{1}{2} H''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+) \leq \\ &\quad H'(\theta_+) + \frac{1}{2} M_1 \delta. \end{aligned} \quad (27)$$

存在 $\delta_1 > 0$ 充分小,当边界层的强度 $\delta < \delta_1$ 时,可使 $M_1 \delta < M_1 \delta_1 < |H'(\theta_+)|$,从而

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} H'(\theta_+) &\leq H'(\theta_+) + \frac{1}{2} H''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+) \leq \\ &\quad \frac{3}{2} H'(\theta_+). \end{aligned}$$

由连续函数的介值原理, 存在 $C_1 \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ 使得

$$H'(\theta_+) + \frac{1}{2}H''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+) = C_1 H'(\theta_+).$$

从而式(26) 可以转化为

$$(\bar{\theta} - \theta_+)_x = C_1 H'(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+), \quad (28)$$

由常微分方程的分离变量法直接计算可得

$$\int_0^x \frac{1}{\bar{\theta} - \theta_+} d(\bar{\theta} - \theta_+) = \int_0^x C_1 H'(\theta_+) dx.$$

取 $k_1 = C_1 H'(\theta_+)$, 则有

$$|\bar{\theta} - \theta_+| = |\theta_- - \theta_+| e^{k_1 x} = \delta e^{k_1 x}. \quad (29)$$

从而由式(29) 可得

$$|(\bar{\theta} - \theta_+)_x| = |C_1 H'(\theta_+)| |\bar{\theta} - \theta_+| = k_1 \delta e^{k_1 x}. \quad (30)$$

同时式(29) 可转化为

$$(\bar{\theta} - \theta_+)_{xx} = C_1 H'(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+)_x$$

及

$$|(\bar{\theta} - \theta_+)_{xx}| = |C_1 H'(\theta_+)| |(\bar{\theta} - \theta_+)_x| = k_1^2 \delta e^{k_1 x}. \quad (31)$$

综合式(29) — 式(31), 当 $H'(\theta_+) < 0$ 时, 可得指数类型的衰减估计式(24).

(2) 当 $H'(\theta_+) = 0$ 的情形: 同样由 Taylor 展开式:

$$\begin{aligned} \bar{\theta}_x &= H(\bar{\theta}) = H(\theta_+) + H'(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+) + \frac{1}{2}H''(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+)^2 + \frac{1}{6}H'''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+)^3, \\ &= \frac{1}{6}[3H''(\theta_+) + H'''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+)](\bar{\theta} - \theta_+)^2, \\ &(\bar{\theta} < \xi < \theta_+). \end{aligned} \quad (32)$$

同样的分析, $H'''(\bar{\theta})$ 在区间 $[\theta_-, \theta_+]$ 上连续, 故 $H'''(\bar{\theta})$ 有界, 即存在 $M_2 > 0$, 使得

$$|H'''(\bar{\theta})| \leq M_2, \bar{\theta} \in [\theta_-, \theta_+].$$

从而

$$\begin{aligned} 3H''(\theta_+) - M_2\delta &\leq 3H''(\theta_+) + H'''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+) \leq \\ &3H''(\theta_+) + M_2\delta, \text{ 存在 } \delta_2 > 0 \text{ 充分小, 当边界层的强度 } \delta < \delta_2 \text{ 时, 可使 } M_2\delta < M_2\delta_2 < |H''(\theta_+)|, \text{ 从而} \\ 2H''(\theta_+) &\leq 3H''(\theta_+) + H'''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+) \leq \\ &4H''(\theta_+). \end{aligned}$$

由连续函数的介值原理, 存在 $C_2 \in (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ 使得

$$\frac{1}{6}[3H''(\theta_+) + H'''(\xi)(\bar{\theta} - \theta_+)] = C_2 H''(\theta_+).$$

从而式(22) 可以转化为

$$(\bar{\theta} - \theta_+)_x = C_2 H''(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+)^2. \quad (33)$$

由常微分方程的分离变量法直接计算可得

$$\int_0^x (\bar{\theta} - \theta_+)^{-2} d(\bar{\theta} - \theta_+) = \int_0^x C_2 H''(\theta_+) dx \text{ 设 } k_2 = -C_2 H''(\theta_+), \text{ 我们可以解得}$$

$$\bar{\theta} - \theta_+ = \frac{\delta}{1 + k_2 x \delta}. \quad (34)$$

以及

$$\begin{aligned} (\bar{\theta} - \theta_+)_x &= C_2 H''(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+)^2 = \\ &-k_2 \left(\frac{\delta}{1 + k_2 x \delta} \right)^2. \end{aligned} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} (\bar{\theta} - \theta_+)_{xx} &= 2C_2 H''(\theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+)(\bar{\theta} - \theta_+)_x = \\ &2k_2^2 \left(\frac{\delta}{1 + k_2 x \delta} \right)^3. \end{aligned} \quad (36)$$

综合式(34) — 式(36), 当 $H'(\theta_+) = 0$ 时, 可得代数类型的衰减估计, 也就是式(25).

结论: 通过对引理 3.1 的求证, 说明方程即式(20) 可以得到解 $\bar{\theta}(x)$ 以及其衰减性, 再代回式(17), 式(19), 进而求解出 $\bar{\rho}(x), \bar{u}(x), \bar{q}(x)$ 整体解的存在性及其衰减性式(10), 式(11), 即定理 2.1 得到求证. 由此, 得到了一维辐射 Euler 方程组边界层解的存在区域和性质.

参考文献:

- [1] Wang J, Xie F. Asymptotic stability of viscous contact wave for the 1-D radiation hydro-dynamics system [J]. Differential Equations, 2011(251): 1030-1055.
- [2] Huang F, Li X. Convergence to the rarefaction wave for a model of radiating gas in one-dimension [J]. Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser., 2016(32): 239-256.
- [3] Fan L, Ruan L, Xiang W. Asymptotic stability of a composite wave of two viscous shock waves for the one-dimensional radiative Euler equations [J]. Ann. I. H. Poincaré, 2019(36): 1 - 25.
- [4] Fan L, Ruan L, Xiang W. Asymptotic stability of rarefaction wave for the inflow problem governed by the one-dimensional radiative Euler equations [J]. SIAM J. Math. Anal., 2019, 51(1), 595 - 625.

(下转第 62 页)

- [2] 赵晓飞,李崇光.农产品供应链联盟的利益分配模型与策略研究[J].软科学,2008(05):90-94,110.
- [3] Ren X Y, Feng Q Q, Wang S, et al. Profit distribution of agricultural supply chain based on Shapley value[J]. Advance Journal of Food Science and Technology, 2015, 7(7): 479-483.
- [4] 高强,穆丽娟.“合作社主导型农产品供应链”利益分配研究[J].西部论坛,2015,25(01):8-15.
- [5] 李泉林,黄亚静,鄂成国.“农超对接”下配送中心与 n 个超市的合作机制研究[J].运筹与管理,2017,26(03):27-35.
- [6] 李军,朱先奇,姚西龙,等.供应链企业协同创新利益分配策略——基于夏普利值法改进模型[J].技术经济,2016,35(09):122-126.
- [7] 胡湘云,王城松,刘小红.基于 Shapley 值法修正的中小企业供应链协同创新收益分配研究[J].工业技术经济,2017,36(07):143-149.
- [8] 周业付.基于改进 Shapley 值模型的农产品供应链利益分配机制[J].统计与决策,2017(23):52-54.
- [9] 薛楠,姜溪.基于互联网+的京津冀一体化农产品智慧供应链构建[J].中国流通经济,2015,29(07):82-87.
- [10] 范德成,胡钰.造船供应链利益分配问题的 Shapley 值法分析[J].哈尔滨工程大学学报,2014,35(05):649-653.
- [11] 梁鹏,李江.基于 Shapley 值法的农产品供应链联盟利益分配机制研究[J].商业研究,2013(08):191-194,216.

(上接第 50 页)

- [20] Song D, Cho E C, Conibeer G, et al. Structural characterization of annealed $\text{Si}1-x\text{C}_x/\text{SiC}$ multilayers targeting formation of Si nanocrystals in a SiC matrix[J]. J. Appl. Phys, 2008, 103(8): 083544-7.
- [21] Cheng Q, Xu S, Ostrikov K. Rapid, low-temperature synthesis of nc-Si in high-density, non-equilibrium plasmas: enabling nanocrystallinity at very low hydrogen dilution[J]. J. Mater. Chem. 2009(19): 5134-5140.

(上接第 55 页)

- [5] Matsumura A. Inflow and outflow problems in the half space for a one-dimensional isentropic model system of compressible viscous gas[J]. Methods Appl. Anal., 2001(8): 645-666.
- [6] Huang F, Li J, Shi X. Asymptotic behavior of solutions to the full compressible Navier-Stokes equations in the half space Commun [J]. Math. Sci. 2010(8):639-654.
- [7] Kawashima S, Nakamura T, Nishibata S, et al. Stationary waves to viscous heat-conductive gases in half space: existence, stability and convergence rate [J]. Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 2011(20):2201-2235.
- [8] 王高雄.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2006.
- [9] 丁同仁,李承治.常微分方程[M].北京:高等教育出版社,2004.
- [10] 盖拉德·泰休.常微分方程与动力系统[M].北京:机械工业出版社,2011.