

文章编号:2095-7386(2016)03-0064-04

DOI:10.3969/j.issn.2095-7386.2016.03.012

离散系统倍周期分岔控制

韩 芩^{1,2}

(1. 武昌工学院 机械工程学院, 湖北 武汉 430065; 2. 华中科技大学 机械科学与工程学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 通过研究一维离散系统的分岔特性和发生混沌的原因, 设计了线性和非线性两种类型的控制器, 并进行倍周期分岔控制, 选取不同的控制器增益, 使系统的倍周期分岔得到了延迟或者提前, 显示了系统复杂的非线性动力特性, 实践中可以选择不同的控制器增益和类型, 实现预期的控制目标。

关键词: 离散系统; 倍周期分岔; 分岔控制; 控制器

中图分类号: TP 273

文献标识码: A

The periodic bifurcation control of the discrete system

HAN Qin^{1,2}

(1. College of Mechanical Engineering, Wuchang Institute of Technology, Wuhan 430065, China;

2. School of Mechanical Science and Engineering, Huazhong University
of Science and Technology, Wuhan 430074, China)

Abstract: Research the characteristic of the bifurcation, and the process of chaos to the one-dimensional discrete system. According to the characteristics, design two types controllers of the linear and non-linear. The periodic bifurcation control, and the choice of the different controller gains, make the system delayed or advanced, which displays the complex non-linear dynamic characteristics. In practice, the different controller gains and types can be chosen to achieve the control objectives.

Key words: discrete system; periodic bifurcation; bifurcation control; controllers.

1 引言

分岔是自然界一种基本的非线性自然现象, 理论上, 由于非线性动力学系统的运动状态失稳而发生分岔, 以至于出现混沌是极其普遍的现象。随着非线性理论的发展, 逐渐对分岔以及混沌都有了更加深入的了解。分岔研究成果应用于许多领域, 如生物工程^[1-3]、机械工程^[4]等方面。

分岔控制作为分岔研究的重要内容之一, 越来越得到重视, 形成了一个新的控制理论方向。分岔

控制的主要任务是对某一具体的系统设计一个控制器来改变其非线性特性, 从而获得需要的动力学行为, 实现预期的控制目标。分岔控制的主要方式^[5-7]: 将分岔的形状和类型进行修改; 使系统的分岔解趋于稳定; 产生新的分岔或使分岔的出现延迟; 使系统极限环幅值或频率得到控制; 控制系统的动力学不稳定解所在区域缩小; 通过系统的分岔混沌特性实现分岔控制达到控制混沌的目的等等。

本文主要是针对于离散系统, 分析了系统的非线性分岔特性, 出现混沌的原因; 并设计不同类型的

收稿日期: 2016-04-19

作者简介: 韩芩(1984-), 女, 助教, 工程硕士, E-mail: duoduo0310@sina.com.

基金项目: 湖北省绿色风机协同创新中心项目(2015XTJY01)。

控制器进行分岔控制,出现分岔点延迟或者提前,实现了控制混沌的目的。

一维离散系统为:

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^2. \quad (1)$$

其中 λ 是非负数常实数, $x \in R$ 。由于离散系统具有平方项,具有复杂的动力学模型。

2 分岔特性

根据不动点的定义,可得系统式(1)不动点

$$x_1^* = 0, x_2^* = \lambda - 1$$

其迭代函数为 $f(x) = \lambda x - x^2$, 这是一个典型的倍周期分岔系统。当 λ 由 3 过渡到 4 时,系统发生分岔,通过倍周期分岔产生混沌如图 1 所示。

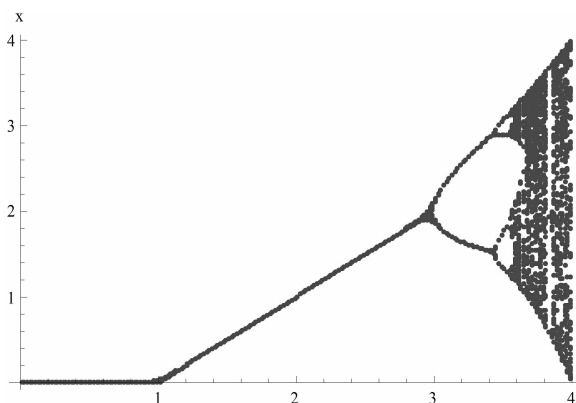


图 1 一维离散系统分岔图

当 $1 < \lambda < 3$ 时,除了 2 个不动点(1-周期点)外,还存在两个 2-周期点。由

$$f^2(x) = -x^4 + 2\lambda x^3 - \lambda x^2 - \lambda^2 x^2 + \lambda^2 x. \quad (2)$$

得:

$$\frac{d}{dx} f^2(x) = -4x^3 + 6\lambda x^2 - 2\lambda x - 2\lambda^2 x + \lambda^2. \quad (3)$$

将不动点 $x^* = \lambda - 1$ 代入(3)得:

$$\frac{d}{dx} f^2(x^*) = 4 - 4\lambda + \lambda^2. \quad (4)$$

当 $\lambda = 3$ 时, $\frac{d}{dx} f^2(x) = 1$, 即 $y = f^2(x)$ 与 $y = x$ 在 $x = x^*$ 处相切。

由 $f^2(x) = x$ 可得 2-周期点,

$$x_{3,4}^* = \frac{1}{2}(1 + \lambda \pm \sqrt{-3 - 2\lambda + \lambda^2})$$

当 $\lambda < 3$ 时,系统只有不动点;当 $\lambda = 3$ 时,

$x_{3,4}^*$ 与 1-周期点重合;当 $\lambda > 3$ 时,就有 2 个 2-周期点 $x_{3,4}^*$ 。

对于系统 1-周期点,由 $\left| \frac{d}{dx} f^2(x_2^*) \right| = (\lambda - 2)^2$

> 1 , 得 $\lambda > 3$, 系统不稳定, x_2^* 是排斥周期点;对于 2-周期点,由 $\left| \frac{d}{dx} f^2(x_{3,4}^*) \right| = |4 + 2\lambda - \lambda^2| < 1$,

得 $3 < \lambda < 1 + \sqrt{6}$, 系统稳定, $x_{3,4}^*$ 是稳定周期点。当 λ 从小于 3 增加到大于 3 的时候,系统 1-周期失稳,倍周期分岔产生了稳定的 2-周期,而在 $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ 时,系统再次失稳,倍周期分岔产生稳定的 4-周期。因此, $\lambda = 3$ 和 $\lambda = 1 + \sqrt{6}$ 分别是系统发生一次倍周期分岔和二次倍周期分岔点。根据倍周期分岔理论,随着 λ 逐渐增大,系统将会出现越来越多的倍周期分岔,大量的分岔出现在越来越窄的 λ 间隔中。当 λ 超过临界值 3.563 时,系统由规则的变化变得无序,即发生混沌。Lyapunov 指数 σ 是直接判断系统混沌性的参数,系统(1)的 Lyapunov 指数谱如图 2 所示。

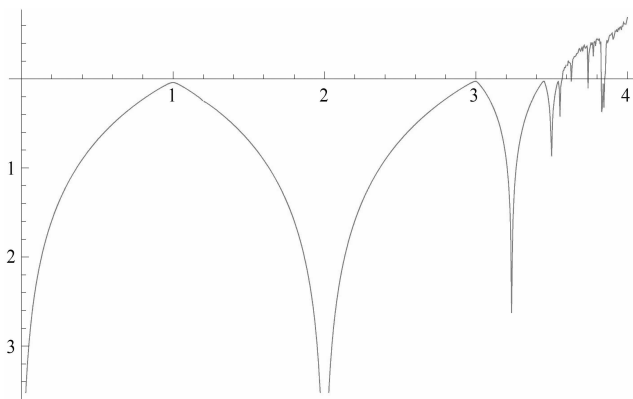


图 2 系统 Lyapunov 指数谱

3 分岔控制

分岔控制是对原系统设计一个控制器,改变原系统的分岔特性。一般对于受控系统,其在不动点 x^* 处的 Jacobi 矩阵为:

$$J = \frac{\partial f(x)}{\partial x} + Q(x) \Big|_{x=x^*} \quad (5)$$

其中, $Q(x)$ 为控制器,可以是线性的,也可以为非线性。通过选取合适的控制器参数,使 J 的所有特征值 $|u_i| < 1$ ($i = 1, 2, 3, \dots$),使不动点 x^* 在一定范围内稳定,从而改变原系统的分岔特性。

3.1 线性控制

对于系统式(1),设计线性控制器 $Q(x) = k_1 + k_2 x$, 则系统变为受控系统:

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^2 + k_1 + k_2 x. \quad (6)$$

通过取得不同的 k_1 、 k_2 值得到系统受控的分岔情况如图 3(a)、(b)、(c)、(d) 所示。

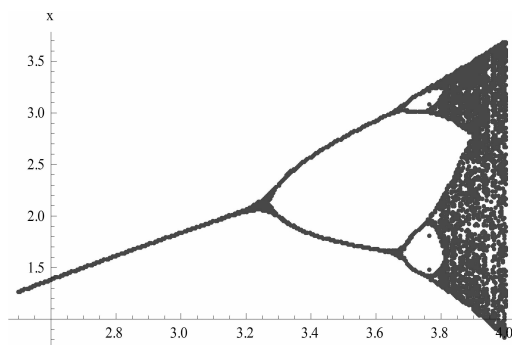
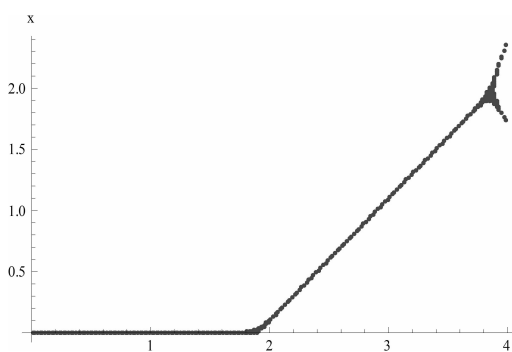
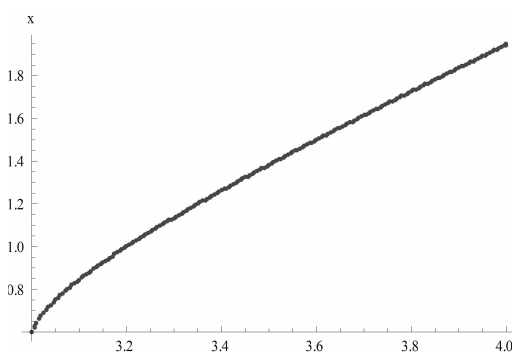
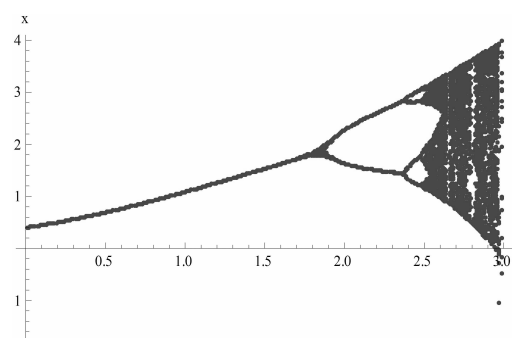
(a) $k_1 = -0.3, k_2 = 0$ (b) $k_1 = 0, k_2 = -0.9$ (c) $k_1 = -0.3, k_2 = -0.9$ (d) $k_1 = 0.2, k_2 = 0.9$

图3 系统线性控制分岔图

$k_1 = -0.3, k_2 = 0$ 时,受控系统式(5)的控制器退化为常数,系统倍周期分岔延迟,发生第一次倍周期分岔出现在 $[3.2, 3.3]$,第二次倍周期分岔出现

在 $[3.6, 3.7]$,在 $[0, 4]$ 之间系统出现混沌;

$k_1 = 0, k_2 = -0.9$ 时,受控系统式(5)的倍周期分岔延迟很明显,第一次倍周期分岔出现在 $[3.8, 4]$,在 $[0, 4]$ 没有第二次倍周期分岔,系统没有混沌现象;

$k_1 = -0.3, k_2 = -0.9$ 时,受控系统式(5)在 $[0, 4]$ 中的没有发生倍周期分岔,混沌现象消失;

$k_1 = 0.2, k_2 = 0.9$ 时,受控参数 k_1, k_2 取为正实数,系统式(2)的倍周期分岔反而提前,发生第一次倍周期分岔出现在 $[1.8, 1.8]$,第二次倍周期分岔出现在 $[2.3, 2.4]$,系统出现混沌是在 $[2.8, 2.9]$ 之间。

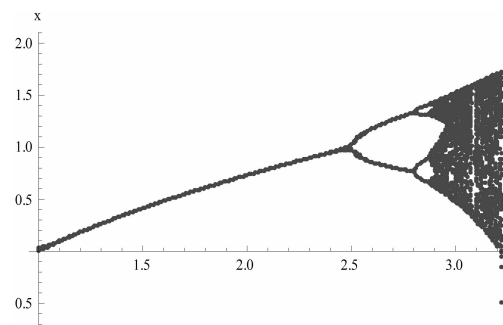
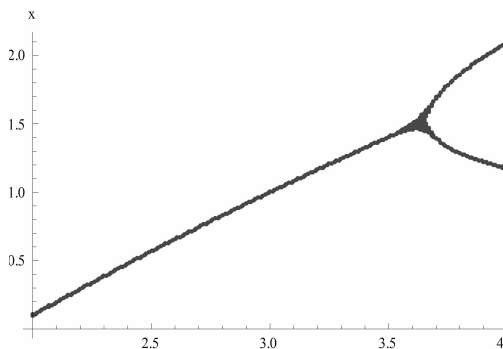
从图3中看出,受控参数 k_1, k_2 为正实数时,受控系统会出现提前发生分岔的情况,相应的会提前进入混沌;取值为非正实数时,受控系统分岔延迟,进入混沌状态也得到相应的延迟或者消失。其中, k_1 的微小变化可以引起系统大幅度的延迟分岔的发生,即在控制器中起着粗调的作用。

3.2 非线性控制

对于系统式(1),设计非线性控制器 $Q(x) = k_1x + k_2x^3$,则系统变为受控系统:

$$x_{n+1} = \lambda x_n - x_n^2 + k_1x + k_2x^3. \quad (7)$$

通过取得不同的 k_1, k_2 值得到系统受控的分岔情况如图4(a)、(b)、(c)、(d)所示。

(a) $k_1 = 0, k_2 = -0.5$ (b) $k_1 = -0.1, k_2 = -0.9$

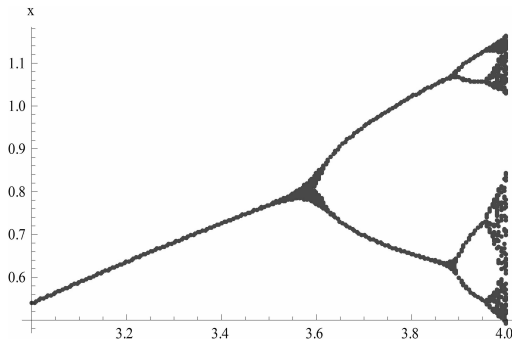
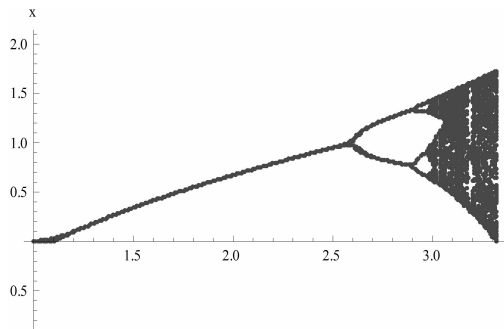
(c) $k_1 = -0.2, k_2 = -0.9$ (d) $k_1 = -0.1, k_2 = -0.1$

图4 系统非线性控制分岔图

$k_1 = 0, k_2 = -0.5$ 时,受控系统式(6)的倍周期分岔不仅没有得到延迟,反而发生第一次倍周期分岔提前,出现在 $[2.4, 2.5]$,第二次倍周期分岔出现在 $[2.8, 2.9]$,在 $[2.9, 3]$ 之间系统出现混沌;

$k_1 = -0.1, k_2 = -0.9$ 时,受控系统式(6)的倍周期分岔的得到延迟,第一次倍周期分岔出现在 $[3.6, 3.7]$ 。在 $[0.4]$ 之间只发生一次倍周期分岔出现,第二次倍周期分岔、混沌等特性都消失;

$k_1 = -0.2, k_2 = -0.9$ 时,受控系统式(6)分岔延迟,发生第一次倍周期分岔出现在 $[3.5, 3.6]$,第二次倍周期分岔出现在 $[3.8, 3.9]$,在 $[0, 4]$ 之间系统出现混沌;

$k_1 = -0.1, k_2 = -0.1$ 时,受控系统式(6)分岔也提前了,发生第一次倍周期分岔出现在 $[2.5, 2.6]$,第二次倍周期分岔出现在 $[2.9, 3]$,系统进入混沌也相应提前,在 $[0, 3.3]$ 之间就出现混沌。

从图4中看出,控制器为单一的立方非线性控制器时,系统的分岔不仅得不到延迟,反而是提前的,也相应的提前进入混沌状态。当 k_1 从0变为-1时,受控系统的分岔特性大幅得到延时,但是再设置为-1.2时,受控系统的分岔变化就不明显,说明非线性控制器中 k_1 不再起着粗调的作用。作为非正实数 k_2 决定着系统分岔的提前或延时,随着 k_2 值

逐渐增加,系统的分岔逐渐由延迟变为提前。因此,选择好 k_1, k_2 值,可以实现控制目标。

4 结束语

笔者分析了离散系统的分岔特性,详细探讨的系统在参数 λ 的变化下,产生倍周期分岔,由1-周期过渡到2-周期,再到4-周期,最后出现混沌。并以此设计了线性控制器和非线性控制器,有效的控制系统的倍周期分岔,使系统的混沌行为得到控制。

参考文献:

- [1] Xue Zhang, Qingling Zhang, Victor Sreeram. Bifurcation analysis and control of a discrete harvested prey - predator system with Beddington - DeAngelis functional response[J]. Journal of the Franklin Institute, 2010, 347 (7): 1076 - 1096.
- [2] Dongmei Xiao, Wenxia Li, Maoan Han. Dynamics in ratio-dependent predator - prey model with predator harvesting[J], Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2006, 324 (1): 14-29.
- [3] Kumar S, Srivastava S K, Chingakham P. Hopf bifurcation and stability analysis in a harvested one- predator - two-prey model[J], Applied Mathematics and Computation, 2002, 129 (1): 107-118.
- [4] Jorge Moiola, Alfredo Desages, Jose Romagnoli. Degenerate. Hopf bifurcations via feedback system theory: higher order harmonic balance[J]. Chemical Engineering Science, 1991, 46 (5-6): 1475-1490.
- [5] Ji J C, Leung A Y T. Resonances of a non-linear s. d. o. f. system with two time-delays in linear feedback control[J]. Journal of Sound and Vibration, 2002, 253(5): 985-1000.
- [6] 唐驾时, 欧阳克俭. Logistic 模型的倍周期分叉控制[J]. 物理学报, 2006, 55 (9): 4437-4441.
- [7] 刘丁, 钱富才, 任海鹏, 等. 离散混沌系统的最小能量控制[J]. 物理学报, 2004, 53 (7): 2074-2078.